

# Wechselwirkung zweier starker eindimensionaler Stoßwellen

Von KLAUS HAIN

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen \*  
(Z. Naturforschg. 11 a, 329—339 [1956]; eingegangen am 5. März 1956)

In der vorliegenden Arbeit werden die beiden möglichen Arten der Wechselwirkung, nämlich Zusammenstoß und Überholen, zweier starker eindimensionaler Stoßwellen behandelt, die ihre asymptotische stabile Form, die Homologie-Verteilung mit  $k=0,39$ , schon erreicht haben.

Die Ergebnisse der numerischen Rechnungen lassen den Schluß zu, daß beim Zusammenstoß die zeitliche Entwicklung der Stoßwellen, die man jetzt nicht mehr als stark approximieren kann, im wesentlichen unabhängig von der anfänglichen Machschen Zahl ist und daß alle Stoßwellen nach Erreichen desselben homologen Abstands  $\xi$  ( $\xi = -0,7$ ), gemessen vom Orte des Zusammenstoßes  $x$  ( $\xi_f = 1$ ) aus, praktisch verschwinden. Die Rechnungen für das Überholen beweisen erneut die Stabilität der Homologie-Lösung  $k=0,39$ , da nach dem Zusammentreffen die Gesamtverteilung sehr schnell wieder zu dieser Homologie-Verteilung zurückkehrt.

In einer vorhergegangenen Arbeit über die Entwicklung von starken Stoßwellen<sup>1</sup> konnte mit Hilfe von numerischen Rechnungen gezeigt werden, daß die Verteilung aller Zustandsgrößen hinter einer starken Stoßfront sich mit wachsender Zeit asymptotisch der Verteilung der Zustandsgrößen annähert, die der WEIZSÄCKERSchen Homologie-Lösung<sup>2</sup> mit  $k=0,39$  entspricht. Inzwischen konnte auch analytisch bewiesen werden<sup>3</sup>, daß diese Lösung stabil und die einzige ist, die Singularitäten an der Umkehrkante vermeidet und im physikalischen Sinne regulär ist; letzteres heißt: Druck und Dichte gehen mit zunehmendem Abstand von der Stoßfront gegen Null, während Geschwindigkeit und Temperatur (bzw. Schallgeschwindigkeit) gegen Unendlich streben.

Es taucht nun die Frage auf, was geschieht, wenn mehrere Stoßwellen zusammentreffen; treten dann ähnlich einfache Verhältnisse wie bei der einzelnen starken Stoßwelle auf, so daß man mit einfachen Parameterwerten diese Wechselwirkung beschreiben und von ihnen eventuell eine Statistik entwickeln kann?

Um der Antwort dieser Frage ein wenig näher zu kommen, wird hier die Wechselwirkung zweier starker homologer Stoßwellen untersucht, d. h. solcher starker Stoßwellen, deren Entwicklung in der Zeit schon so weit fortgeschritten ist, daß ihre asymptotische stabile Form — die Homologie-Lösung mit  $k=0,39$  — erreicht ist. In dem hier

betrachteten eindimensionalen Fall gibt es zwei Arten der Wechselwirkung:

- a) zwei Stoßwellen laufen aufeinander zu:  
Zusammenstoß (head on collision)<sup>4</sup>,
- b) zwei Stoßwellen laufen hintereinander her:  
Überholen (overtaking).

Da im Fall a) die resultierenden Stoßwellen und im Fall b) die überholende Stoßfront bis zum Erreichen der vorderen starken nicht mehr als stark anzusehen sind, gilt es, zunächst für diesen Fall ein geeignetes Rechenverfahren anzugeben. Danach wird der Zusammenstoß für verschiedene Frontgeschwindigkeitsverhältnisse der zusammenstoßenden homologen Stoßfronten behandelt. Anschließend wird das Überholen für verschiedene Parameterwerte, die die Stärke bestimmen, mit der die überholende Stoßfront die vordere starke erreicht, untersucht.

## I. Rechenmethoden

Bezeichnungen:

$u$  = Strömungsgeschwindigkeit,

$a$  = Schallgeschwindigkeit,

$s = S/c_v$  = dimensionslose Entropie,

$\Delta$  = Differenzen längs der Front,

$\nabla^+, \nabla^-, \nabla^0$  = Differenzen längs der (rückwärtigen)

$C^+, C^-, C^0$ -Charakteristik (vgl. l. c.<sup>1</sup>),

$ds^\pm$  = (nicht exaktes) Differential der RIEMANN-schen Invarianten (vgl. auch l. c.<sup>1</sup>).

<sup>3</sup> W. HÄFELE, Z. Naturforschg. 10 a, 1017 [1955].

<sup>4</sup> COURANT-FRIEDRICH, Supersonic Flow and Shock Waves, Interscience Publishers, New York 1948.

\* Jetzt Centro Técnico da Aeronáutica, São José dos Campos S. P., Brasil.

<sup>1</sup> K. HAIN u. S. v. HOERNER, Z. Naturforschg. 9 a, 993 [1954].

<sup>2</sup> C. F. v. WEIZSÄCKER, Z. Naturforschg. 9 a, 269 [1954].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

$$\begin{aligned}\varrho &= \text{Dichte}, \\ p &= \text{Druck}, \\ \varkappa &= c_p/c_v = 1 + 2/f.\end{aligned}$$

Zur numerischen Integration der EULERSchen Gleichungen, die wir hier wieder in ihrer charakteristischen Normalform benutzen,

$$\begin{aligned}ds^\pm &= du^\pm \left( \frac{2}{z-1} da - \frac{1}{z(z-1)} a ds \right) = 0 \\ &\quad \text{längs } u^\pm = C^\pm, \\ ds^0 &= ds = 0 \quad \text{längs } u = C^0,\end{aligned}$$

wurde das gleiche Verfahren wie in der vorhergegangenen Arbeit<sup>1</sup> angewandt, das man wie folgt charakterisieren kann: Charakteristikenverfahren mit differentieller Erfüllung der Randbedingungen; im Gegensatz zur früheren Arbeit entsprechen die Randbedingungen an der Front nicht mehr den starken Frontbedingungen.

Das Problem der exakten Bestimmung der Frontgeschwindigkeit sowie der Zustandsgrößen an der Front wurde iterativ gelöst. Zunächst lässt man die Stoßwelle mit der Frontgeschwindigkeit in das variable Medium hineinlaufen, die dem letzten berechneten Raumzeitpunkt entspricht, dann mit der durch diese Rechnung geänderten Frontgeschwindigkeit usw., bis die Iteration hinreichend genau ist. (Meistens zwei bis drei Iterationen.) Wir führen die folgenden Definitionen ein:

$$\beta = \varrho_0/\varrho_1, \quad \lambda_i = a_i^2/(v - u_0)^2.$$

Dann lauten die Stoßbedingungen, wenn wir die Größen vor der Front mit 0, die hinter der Front mit 1 bezeichnen,

$$\begin{aligned}\beta &= 1 - \frac{2}{z+1}(1 - \lambda_0), \\ u_1 - u_0 &= (1 - \beta)(v - u_0), \\ \lambda_1 &= \lambda_0 \left\{ 1 + 2 \frac{z-1}{(z+1)^2} \left[ \frac{z}{\lambda_0} - (z-1) - \lambda_0 \right] \right\}, \\ e^{s_1 - s_0} &= \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \beta^{z-1}.\end{aligned}$$

Differenzieren dieser Formeln in Frontrichtung ergibt

$$\begin{aligned}\Delta(u - u_0) &= (1 - \beta) \Delta(v - u_0) - \Delta\beta(v - u_0), \\ \Delta\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) &= -\frac{z-1}{z+1} \left( \frac{z}{\lambda_0^2} + 1 \right) \Delta\beta, \\ \Delta(s_1 - s_0) &= \frac{\Delta(\lambda_1/\lambda_0)}{(\lambda_1/\lambda_0)} + (z-1) \Delta\beta/\beta.\end{aligned}$$

Nun gilt aber längs der  $(u+a)$ -Charakteristik

$$ds^+ = 0,$$

also

$$ds^+ = \nabla^+ s^+ - \Delta s^+ = 0.$$

Nach etwas mühsamer Rechnung findet man

$$\begin{aligned}\Delta(v - u_0) &= -\nabla^+ s^+ + \Delta u_0 + (2 a_+/z - 1 + 2B) \Delta a_0/a_0 - a_+ \Delta s_0/z(z-1) \\ &\quad \frac{1 - \beta - 2B/(v - u_0)}{1 - \beta - 2B/(v - u_0)}\end{aligned}$$

mit den folgenden Definitionen:  $a_+$  Mittelwert von  $a$  auf der  $(u+a)$ -Charakteristik zwischen letztem Punkt auf dieser und Frontpunkt,

$$B = \frac{2}{z+1} \left[ -(v - u_0) \lambda_0 + \frac{z + \lambda_0^2}{z+1} \left( \frac{a_+}{z} - a_1 \right) \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_0 a_+}{z \beta} \right].$$

Man sieht leicht, daß die Formeln in die für starke Stoßwellen übergehen, wenn man  $\lambda_0 = 0$  setzt.

Die Verteilung der Zustandsgrößen hinter der Front vor dem Zusammenstoß soll der asymptotischen, stabilen Homologie-Lösung mit  $k = 0,39$  entsprechen. Definieren wir den homologen Abstand  $\xi$  durch

$$\xi = (x - x_0)/(t - t_0)^{1-k},$$

so können wir diese näherungsweise darstellen durch<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}u &= (1 - k)(t - t_0)^{-k} \varphi(\xi), \\ a &= (1 - k)(t - t_0)^{-k} \psi(\xi), \\ s &= -2k \ln(t - t_0) - 1,32\varphi - 1,51\varphi^2 \\ \varphi &= 1,505\xi - 0,75 \\ \psi &= 0,7 - 0,12\varphi - 0,089\varphi^2 \quad \left. \right\} \text{für } \xi \geq 0,4; \\ u &= (1 - k)(t - t_0)^{-k} \varphi'(\xi), \\ a &= (1 - k)(t - t_0)^{-k} \psi'(\xi), \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= -\frac{2k}{t - t_0}, \quad \frac{\partial s}{\partial \varphi} = -\frac{0,373}{\psi^4}, \\ \varphi' &= \varphi \\ \psi' &= 0,699 - 0,16\varphi \quad \left. \right\} \text{für } \xi < 0,4.\end{aligned}$$

Der Weg der Front wird durch  $\xi_f = 1$  bestimmt. Die noch freien Parameter  $x_0, t_0$  sind so zu bestimmen, daß für einen gegebenen Raumzeitpunkt  $t_1, x_1$  eine Größe einen vorgeschriebenen Wert annimmt, z. B.  $u_f = u_1$  an der Front.

Die differentielle Erfüllung der Randbedingungen bedingt manche Fehler. Bei den numerischen Rechnungen wurde nicht versucht, diese Fehler durch geeignete Maßnahmen, wie direktes Einsetzen der Frontbedingungen und gewisse Mittelwertbestimmungen für den Frontstärkeparameter  $\beta$ , zu beseitigen, da dann die Rechnungen, die die Kapazität und Rechengeschwindigkeit der G 1 schon fast überstiegen, noch umfangreicher geworden wären. Eine nachträgliche Bestimmung des Parameters  $\beta$  aus den verschiedenen Frontbedingungen er-

gab, daß der Fehler etwa bis zu 5% betrug, was man als den Rechenfehler der Rechnungen ansehen kann. Wie in der vorhergegangenen Arbeit<sup>1</sup> ausgeführt worden ist, ist der Rechenfehler bei den benutzten Maschenweiten des Charakteristikennetzes wesentlich kleiner. Bei einer erneuten Rechnung mit einer schnelleren Maschine mit größerer Speicherkapazität müßte man durch geeignete Maßnahmen den Fehler bei der Erfüllung der Randbedingungen wesentlich herunterdrücken können.

## II. Zusammenstoß

Um die Rechnungen für den Zusammenstoß zweier Stoßwellen beginnen zu können, haben wir zunächst die Randbedingungen im Raumzeitpunkt des Zusammenstoßes zu erfüllen, die weiteren Randbedingungen für größere Zeiten ergeben sich dann aus den oben abgeleiteten Gleichungen. Die Zustandsgrößen im Raumzeitpunkt des Zusammenstoßes ergeben sich nach den für stationäre Stoßwellen geltenden Gleichungen, wie sie bei COURANT-FRIEDRICH<sup>4</sup> gegeben sind.

Es mögen zwei starke in ein ruhendes Medium einlaufende Stoßwellen in einem Raumzeitpunkt P zusammenstoßen. Wir wissen, daß Diskontinuitäten nur längs Charakteristiken auftreten. Hier liegt nur die  $u$ -Charakteristik innerhalb des von den beiden Stoßwellen aufgespannten Raumzeitkegels. Da die Entropie die Invariante der  $u$ -Charakteristik ist (Teilchenbahn), folgt, daß diese rechts und links

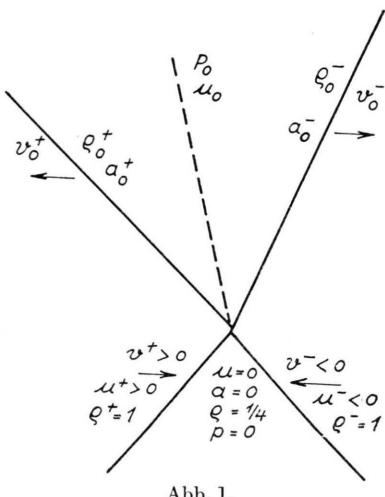


Abb. 1.

der  $u$ -Linie verschiedene Werte annimmt, während die beiden anderen RIEMANNSchen Invarianten stetig über diese fortgesetzt werden müssen. Es folgt sofort, daß  $u$  keinen Sprung machen kann. Durch Inte-

gration einer der charakteristischen Gleichungen auf beiden Seiten der  $u$ -Charakteristik ergibt sich

$$a_0^+/a_0^- = \exp \left[ \frac{1}{2} (\zeta - 1) (s_0^+ - s_0^-) \right].$$

Damit folgt aus der Zustandsgleichung

$$p_0 = p_0^+ = p_0^-,$$

d. h. daß der Druck auf beiden Seiten denselben Wert hat, was ja auch aus physikalischen Gründen von vornherein klar ist.

Es bleiben also sechs Größen zu bestimmen:

$$v_0^+, v_0^-, \rho_0^+, \rho_0^-, u_0, p_0.$$

Die HUGONIOT-Relationen und die mechanischen Randbedingungen ergeben demgemäß sechs Gleichungen (vgl. COURANT-FRIEDRICH<sup>4</sup>)

$$(m^\pm)^2 + 2 A^\pm m^\pm - 1 = 0,$$

$$p^0/p^\pm = (m^\pm)^2 (1 + \mu^2) - \mu^2,$$

$$\rho_0^\pm / \rho^\pm = (p_0 + \mu^2 p^\pm) / (\mu^2 p_0 + p^\pm)$$

mit den Abkürzungen

$$\mu^2 = (\zeta - 1) / (\zeta + 1),$$

$$m^\pm = (v_0^\pm - u^\pm) / a^\pm,$$

$$A^\pm = \frac{1}{2} (u^\pm - u_0) / (1 - \mu^2) a^\pm.$$

Aus

$$u^+ > 0, v_0^+ < 0; u^- < 0, v_0^- > 0$$

folgt

$$m^+ < 0, m^- > 0,$$

d. h. es wird

$$m^\pm = - A^\pm \mp \sqrt{1 + (A^\pm)^2}.$$

Die beiden anderen Lösungen würden ankommende Stoßwellen bedeuten. Für starke Stöße ist

$$p = 0, \rho^\pm = 1;$$

damit wird

$$\frac{v_0^\pm}{u^\pm} = 1 - \frac{\mu^2}{1 - \mu^2} \sqrt{1 + \frac{1 - \mu^2}{\mu^4} \frac{p_0}{(\mu^\pm)^2}},$$

$$\frac{v_0^\pm - u_0}{u^\pm} = \frac{\mu \sqrt{1 + \mu^2}}{1 - \mu^2} \left\{ - A^\pm \mp \sqrt{1 + (A^\pm)^2} \right\}.$$

Durch Einsetzen einer dieser Gleichungen in die andere entsteht eine Gleichung achten Grades für  $u_0$ . Diese Gleichung wurde durch das NEWTONSche Näherungsverfahren numerisch auf der G 1 gelöst, ohne daß das Einsetzen analytisch durchgeführt wurde. Das Resultat der Rechnung für  $\zeta = 5/3$  ist in Abb. 2 dargestellt. Man erkennt sofort, daß die Stoßwellen nach dem Zusammenstoß nicht mehr

stark sind ( $\beta = 1/4$  würde starken Stoßwellen entsprechen). Man sieht ferner, daß der Druck für  $u^+ = -u^-$  auf das 6-fache ansteigt ( $p = 2$ ,  $p^+ = p^- = 1/3$ ; vgl. COURANT-FRIEDRICH, Reflexion von Stoßwellen an einer festen Wand, die für diesen Fall die Gleichungen explizit lösen). Der Grenzfall, daß die eine Welle unendlich schwach ist, ist nicht etwa dadurch gekennzeichnet, daß die schwache Stoßwelle zu einer Schallwelle wird, sondern daß sie durch einen Wert von  $\beta = 2/3$  charakterisiert wird.

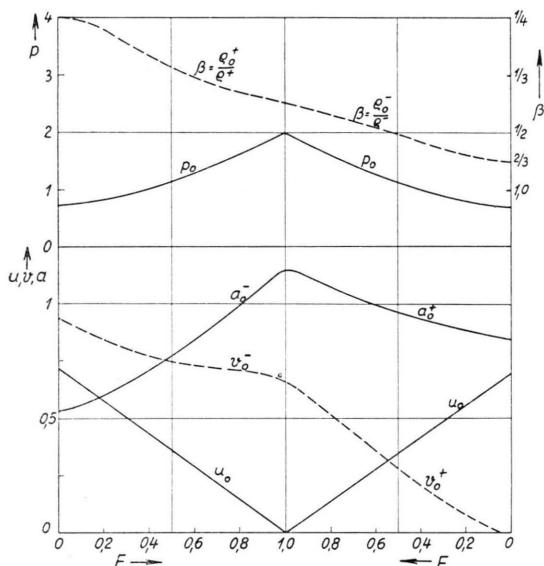


Abb. 2. Zustandsgrößen beim stationären Zusammenstoß.  
Normierung:  $u_0=1$ ,  $\varrho_0=1$ .

Die starke Stoßwelle läuft zwar im ersten Augenblick als „starke“ Stoßwelle weiter, ihre Dichte erleidet aber einen Sprung um einen Faktor vier.

Zu Beginn der Rechnung der zeitlichen Entwicklung des Zusammenstoßes nehmen wir zunächst an, daß die Änderungen der Größen längs der  $u$ -Charakteristik Null sind, und berechnen mit dieser Annahme durch das oben angegebene Iterationsverfahren die Änderungen der Zustandsgrößen an der Front und die Frontgeschwindigkeit, die sich allein durch die Variabilität des Mediums ergeben, in das die Stoßwellen hineinlaufen. Aus diesen Änderungen berechnet man dann nach dem Charakteristikenverfahren die Änderungen der Zustandsgrößen an der  $u$ -Linie, indem man die dazu benötigten Zwischenwerte längs der Front linear interpoliert. Die Iterationen werden abgebrochen, wenn sich die Größen auf der  $u$ -Linie nicht mehr wesentlich ändern. Dies ist etwa nach vier bis fünf Iterationen der Fall.

Da es sich hier um eine ganze Reihe von linearen Interpolationen handelt, muß man mit der Wahl der Schrittweite sehr vorsichtig sein, denn die hier verwandten Näherungen sind nur bei verhältnismäßig kleinen Schrittweiten genau genug. Außerdem wachsen diese kleinen Fehler mit der Zeit sehr schnell an, wenn sie außerhalb eines gewissen Größenbereichs fallen. Dieses Fehleranwachsen bedürfte noch einer theoretischen Untersuchung, die aber noch nicht durchgeführt worden ist, da sie sehr kompliziert ist.

Die weitere Rechnung erfolgt wie in der früheren Arbeit<sup>1</sup> längs der  $(u+a)$ -Charakteristiken auf der jeweiligen Seite. (Die  $(u-a)$ -Charakteristiken gehen durch Vorzeichenwechsel in der Koordinatenachse  $x$  in die  $(u+a)$ -Charakteristiken der anderen Seite über.) Der einzige Unterschied ist, daß es sich hier nicht mehr um starke Stoßwellen handelt, und daß daher die  $(u+a)$ -Charakteristiken der Front mehr parallel sind als bei den früheren Untersuchungen. Um zu großen Abständen der  $(u-a)$ -Charakteristiken zu vermeiden, müssen mehr Zwischenpunkte eingeschaltet werden. Die Anzahl der Zwischenpunkte wurde durch die ganze Zahl bestimmt, die am nächsten an dem Parameter

$$N = 1,4 \, a / \lceil v - (u + a) \rceil$$

liegt. (Bei starken Stoßwellen wäre  $[N] = 3$ .)

Dieses ganze Verfahren geht sehr gut bis etwa  $\beta = 0,8$ . Von da an kann man die Stoßwellen als schwach ansehen und längs der Front die Entropieerzeugung, die dann sehr klein ist, in anderer Weise

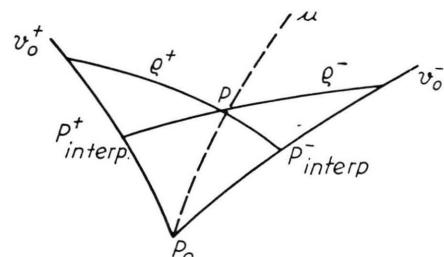


Abb. 3

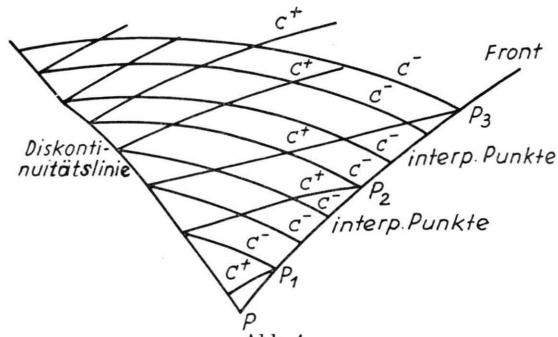


Abb. 4.

berücksichtigen oder auch ganz vernachlässigen. (Wenn die Stoßwelle schwach ist, geht jene bekanntlich erst mit der dritten Potenz der Stoßstärke.) Diese Rechnungen wurden hier nicht durchgeführt.

### III. Überholen

Beim Überholen zweier Stoßwellen tritt im Augenblick des Überholens eine *centered rarefaction wave* auf (vgl. l. c.<sup>4</sup>), was man symbolisch durch die Gleichung

$$\overset{\rightarrow}{S} \underset{\rightarrow}{S} \Rightarrow \overset{\rightarrow}{R} \underset{\rightarrow}{S}$$

beschreiben kann. Die Randbedingungen sind im Augenblick des Zusammenstoßes „stationär“ zu berechnen (vgl. II). Die Strömungsgeschwindigkeit<sup>5</sup>  $u_0$  und die Dichte  $\varrho_0$  normieren wir zu 1, dann wird für  $\varkappa = 5/3$

$$v_0 = \frac{4}{3}, \quad \varrho_0 = 1, \quad p_0 = \frac{1}{3}, \quad a_0 = \frac{1}{3}\sqrt{5}.$$

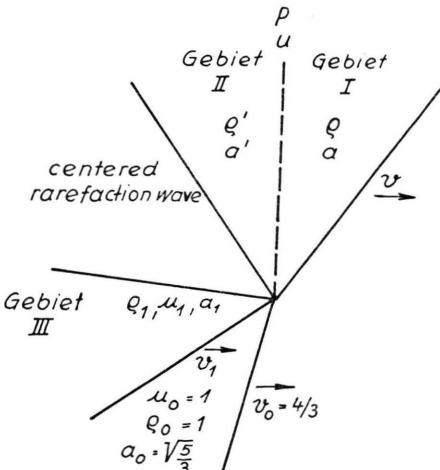


Abb. 5.

Mit der Definition

$$\beta = \varrho_0 / \varrho_1 = 1 / \alpha_1$$

kann man  $v_1$ ,  $u_1$ ,  $a_1$  als Funktionen dieses einen Parameters darstellen:

$$p_1 = \frac{1}{3} \frac{1-\beta/4}{\beta-1/4}, \quad v_1 = 1 + \sqrt{\frac{5}{12}} \frac{1}{\beta-1/4},$$

$$u_1 = 1 + (1-\beta) \sqrt{\frac{5}{12}} \frac{1}{\beta-1/4}, \quad a_1 = \sqrt{\frac{5}{9}} \beta \frac{1-\beta/4}{\beta-1/4}.$$

Für die *centered rarefaction wave* gelten die folgenden Übergangsbedingungen (vgl. l. c.<sup>4</sup>)

<sup>5</sup> Für Indexbezeichnung siehe Abb. 5.

$$u + 3 a' = u_1 + 3 a_1 = c = \text{const},$$

$$(p/p_1) = (\varrho'/\varrho_1)^{5/3}, \quad (a'/a_1) = (\varrho'/\varrho_1)^{1/3},$$

$$p/p_1 = (a'/a_1)^5 = [(c-u)/3 a_1]^5.$$

Wegen der starken Frontbedingungen gilt ferner

$$p = u^2/3,$$

also

$$u^2 = 3 p_1 [(c-u)/3 a_1]^5,$$

$$\varrho' = \frac{1}{\beta} [(c-u)/3 a_1]^3,$$

$$a' = \frac{1}{3} (c-u).$$

Diese Gleichungen wurden numerisch durch das NEWTONSche Näherungsverfahren auf der G 1 gelöst. Die Lösungen veranschaulicht Abb. 6.

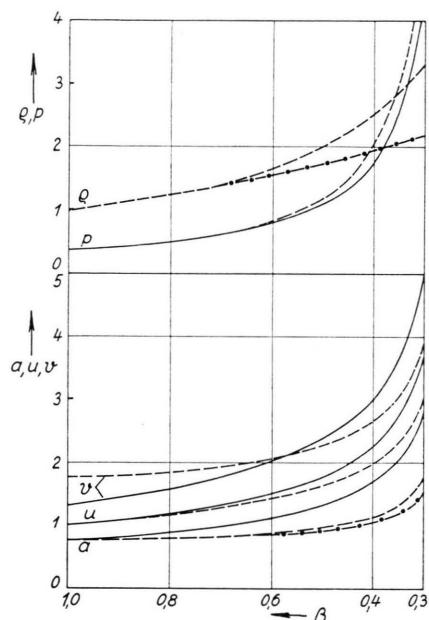


Abb. 6. Zustandsgrößen beim stationären Überholen.  
Normierung:  $u_0 = 1, \varrho_0 = 1$ ;  
Gebiet I ———, Gebiet II - - - - , Gebiet III - - - .

Man sieht, daß im allgemeinen die Zustandsgrößen für die Gebiete II und III nicht sehr viel voneinander verschieden sind; im Gegensatz dazu ist der Unterschied zwischen den Gebieten I und II an der Diskontinuitätslinie viel größer. Die Diskontinuitätslinie ist eine sehr viel ausgeprägtere Linie als die *centered rarefaction wave*, die man bei Experimenten wahrscheinlich kaum sehen würde. Ein weiteres bemerkenswertes Ergebnis ist, daß für größere Stoßstärken  $\beta < 0,62$  die resultierende Front schneller als die ursprüngliche Front ist. Für  $\beta \rightarrow 0,25$ , dem Grenzfall einer überholenden star-

ken Stoßfront, gehen natürlich alle Größen außer der Dichte gegen unendlich.

Die *centered rarefaction wave* bedingt im Gegensatz zur Diskontinuitätslinie einen Sprung in einer Invarianten, die Größen enthält, die die Richtungen der Charakteristiken bilden. So tritt auch eine Unstetigkeit in diesen Richtungen in dem Raumzeitpunkt des Beginns der *centered rarefaction wave* auf, der zur Folge hat, daß sich die  $(u - a)$ - bzw. die  $(u + a)$ -Charakteristiken, die von diesem Punkt ausgehen, sofort in ein ganzes Büschel – eben diese *centered rarefaction wave* – aufspalten.

Für die raumzeitliche Entwicklung der Verteilung beim Überholen ist nur eine Sonderbehandlung der *centered rarefaction wave* im Zeitintervall nach deren Entstehung notwendig. Diese erreicht man leicht, indem man den Sprung in der RIEMANNSchen Invarianten, der sich sofort ausbreitet, in gleiche Teile einteilt und die Veränderungen der Zustandsgrößen für diese  $(n+1)$   $(u - a)$ -Charakteristiken, die vom Zentrum der *centered rarefaction wave* ausgehen, nach einem etwas modifizierten Charakteristikenverfahren berechnet. Die übrige Rechnung für das Überholen verläuft genau so wie im Falle des Zusammenstoßes; nur daß man jetzt für die  $x$ -Koordinaten der Verteilung, in die die Stoßwelle hineinläuft, ein anderes Vorzeichen wählen muß.

Praktisch wurde die Rechnung so durchgeführt, daß bis zu einem gewissen Zeitpunkt die überholende Stoßwelle fast ungeändert als stark und homolog angenommen wurde; sie wurde nur soweit abgeändert, daß sie nunmehr die durch die endliche Schallgeschwindigkeit vor der Front erforderlichen Randbedingungen erfüllt, wenn die Rechnung begonnen wird. Erfüllt man die Randbedingungen zu Beginn der Rechnung nicht genau, so schleichen sich Fehler ein, die nach kurzer Zeit so stark anwachsen, daß sie die weitere Rechnung wertlos machen. Im übrigen gilt für die Rechengenauigkeit das oben Gesagte.

#### IV. Rechenergebnisse für den Zusammenstoß

Um allgemein den Zusammenstoß zweier Stoßwellen in etwa übersehen zu können, wurde die Entwicklung eines Stoßes für drei verschiedene Parameterwerte  $F$  durchgeführt

$$F = -u^+/u^- = 1, 1/2, 1/4$$

(darin sind automatisch  $F=2$  und  $F=4$  eingeschlossen, wenn man die beiden Seiten vertauscht). Als Koordinatensystem wurde eines gewählt, bei dem im Augenblick des Zusammenstoßes  $t=x=0$

ist und bei dem die  $x$ -Richtung in Richtung der stärkeren Stoßwelle liegt, deren Teilchengeschwindigkeit wir im Augenblick des Zusammenstoßes immer eins wählen. Es ergeben sich aus der Bedingung  $u_- = -1$  an der Front für die Zeit  $t_0$ , d. i. die Zeit, die die Stoßwelle schon gelaufen ist, und für  $x_0$  die folgenden Werte.

$u^+$	1	$1/2$	$1/4$
$t_0$	-0,134	-0,796	-4,706
$x_0$	0,294	0,870	2,572

Die Abb. 7 zeigt die zeitliche Entwicklung der Größen an der Front über der Zeit aufgetragen.

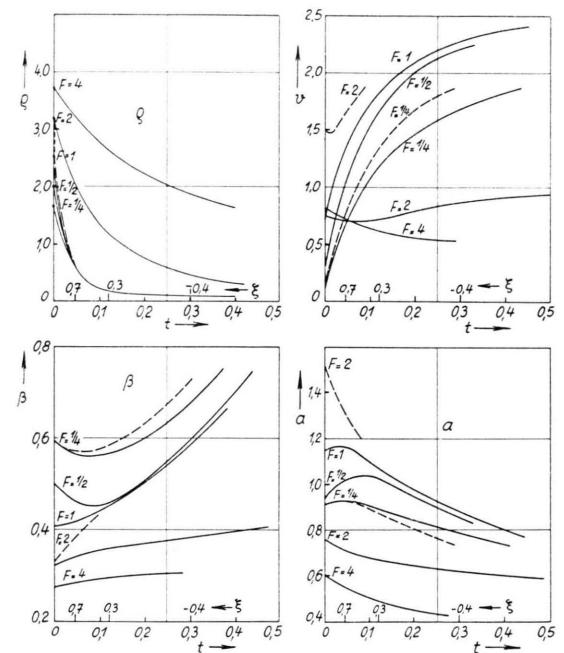


Abb. 7. Zeitliche Entwicklung der Zustandsgrößen an der Front beim Zusammenstoß. Die gestrichelten Kurven geben die Entwicklung im  $\xi$ -Maßstab an. Dabei sind  $u$ ,  $a$  und außerdem noch  $u^- = -1$  normiert. Der  $\xi$ -Maßstab wurde so gewählt, daß im Fall  $F=1$ ,  $F=1/2$  die gestrichelten mit den ausgezogenen übereinstimmen, deswegen sind hier nur die ausgezogenen Kurven gezeigt.

Man sieht, daß abgesehen vom Anfang alle Kurven für  $F \leq 1$  ein ähnliches Verhalten zeigen: Die Frontgeschwindigkeit nimmt zu, erstens dadurch, daß die Strömungsgeschwindigkeit der Verteilung, in welche die Front hineinläuft, kleiner wird, und zweitens dadurch, daß die ganze Stoßwelle durch das Abnehmen der Dichte in die Verteilung hineingesogen wird. Für die kleineren Parameterwerte ist dieses Hineinsaugen so stark, daß es zur Aufbrin-

gung der Energie ausreicht, die notwendig ist, um eine Weile die Stoßfront stärker zu machen. Aber auf die Dauer ist der Energieinhalt hinter der Stoßfront nicht groß genug, um die Energie zu liefern, die zur Aufrechterhaltung einer Stoßfront (Entropiedifferenz, d. h. Vermehrung der inneren Energie) nötig ist; die Stoßfront wird schwächer und verschwindet schließlich ganz.

Das Verhalten der Kurven für  $F \leq 1$  lässt die Vermutung aufkommen, daß sich alle Kurven ähnlich verhalten, wenn man nur statt des Parameters  $t$  einen geeigneten anderen Parameter für die zeitliche Entwicklung wählt. Für  $F \leq 1$  laufen alle Stoßfronten in eine Homologie-Lösung hinein, die durch dieselben Parameterwerte  $x_0, t_0$  gekennzeichnet wird. Es liegt nun nahe, statt der Zeit  $t$  den Wert  $\xi$  dieser Homologie-Verteilung, den die hineinlaufende Front erreicht hat, zu benutzen. Es ergibt sich die folgende Umrechnungstabelle.

$\xi$	0,25	0,5	1,0	2,0
1,0	0	0	0	0
0,7	0,048	0,057	0,043	0,23
0,3	0,162	0,140	0,120	—
-0,4	0,430	0,330	0,300	—

Tab. 1.  $t$ -Werte für verschiedene Werte von  $F$  und  $\xi$ . Bei allen hier nicht aufgeführten Werten für  $F=2$  und  $F=4$  ist  $t > 0,5$ .

Ferner wollen wir die Kurven so normieren, daß die mit der betrachteten Stoßfront zusammentreffende Stoßwelle den Anfangswert  $u^- = -1$  für  $t = 0$  hat. Die Kurven für  $\varrho$  für verschiedene  $F$  gehen dann praktisch in eine Kurve über, während die Kurven für  $v$  einander viel ähnlicher werden. Die  $a$ -Kurven werden bei dieser Transformation fast parallel.

Danach ist es durchaus möglich, daß das Verhalten der Stoßwelle im wesentlichen durch das Medium bestimmt wird, in das die Stoßwelle hineinläuft. Wohl am deutlichsten wird dieses Verhalten, wenn man die MACHSchen Zahlen

$$M = (v - u_0)/a_0$$

gegen  $\xi$  für die verschiedenen Parameterwerte  $F$  aufträgt (Abb. 8). Man sieht, daß zunächst wegen des starken Dichteabfalls hinter der Front die Stoßwellen für kleinere Parameterwerte  $F < 1$  stärker werden, d. h. die MACHSchen Zahlen größer werden, um dann abzufallen, so daß für alle  $F \leq 1$  etwa bei

$\xi = -0,7$   $M = 1$  erreicht wird, was bedeutet, daß die Stoßwellen an diesem Punkt verschwinden. Für

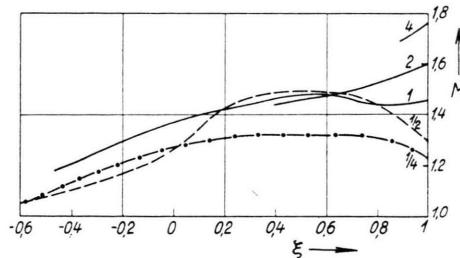


Abb. 8. MACHSche Zahlen  $M$  der zeitlichen Entwicklung der Stoßfronten beim Zusammenstoß.

$F = 2$  und  $F = 4$  sind die Rechnungen leider so weit durchgeführt worden, um das Verhalten bei  $\xi = -0,7$  zu zeigen (der Rechenaufwand würde etwa das 15-fache der hier vorliegenden Rechnungen betragen; würde man die Kurve für  $F = 2$  extrapoliieren, so würde auch sie etwa bei  $\xi = -0,7$  durch die Linie  $M = 1$  gehen). Wenn die Rechnungen auch nicht vollständig sind, so möchten wir hier doch die Vermutung aufstellen, daß das Verhalten der Stoßwellen beim Zusammenstoß fast ausschließlich von der Homologie-Verteilung abhängt, in die die Stoßwellen hineinlaufen, und im wesentlichen unabhängig ist von der Anfangsstoßstärke. Ferner sind alle Stoßwellen bei  $\xi = -0,7$  praktisch zu Ende.

Die Ähnlichkeit des Verhaltens für verschiedene Parameterwerte  $F$  gilt auch für die räumliche Verteilung der Zustandsgrößen hinter der Front für verschiedene Zeiten.

In den Abb. 9, 10, 11 sind die räumlichen Verteilungen der Zustandsgrößen als Funktionen des normierten Abstands  $x$  von der Stoßfront aufgetragen.  $x$  ist dabei so normiert, daß der Abstand der Stoßfront bis zur Diskontinuitätslinie immer 3,0 beträgt. Definiert man den Normierungsfaktor  $\eta(t)$  durch

$$\eta(t) = 3/(x_f - x_u)$$

( $x_u$  ist die  $x$ -Koordinate der Diskontinuität zur Zeit  $t$ ), so wird

$$\bar{x} = \eta(x - x_u).$$

$\eta(t)$  ist in der Abb. 12 als Funktion von  $t$  aufgetragen. Wie man aus dem Diagramm ersieht, wachsen die Kurven für verschiedene  $F$  fast nach demselben Exponentialgesetz.

Der räumliche Verlauf für alle Verteilungen mit  $F \leq 1$  ist ähnlich: fast linearer Anstieg von Strömungs- und Schallgeschwindigkeit nach der Front hin und starker Anstieg der Entropie. Daraus folgt,

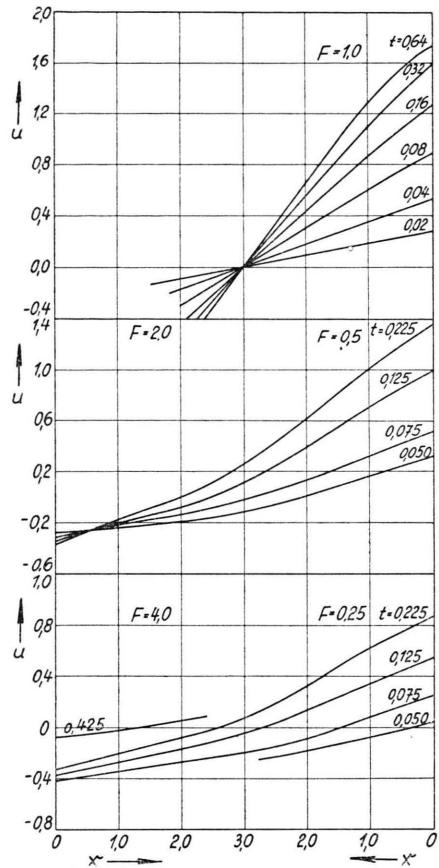


Abb. 9. Räumliche Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit  $u$  für verschiedene Zeiten  $t$  beim Zusammenstoß.

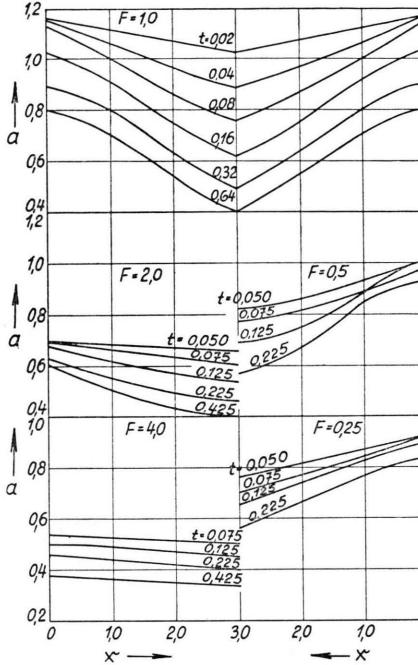


Abb. 10. Räumliche Verteilung der Schallgeschwindigkeit  $a$  für verschiedene Zeiten  $t$  beim Zusammenstoß.

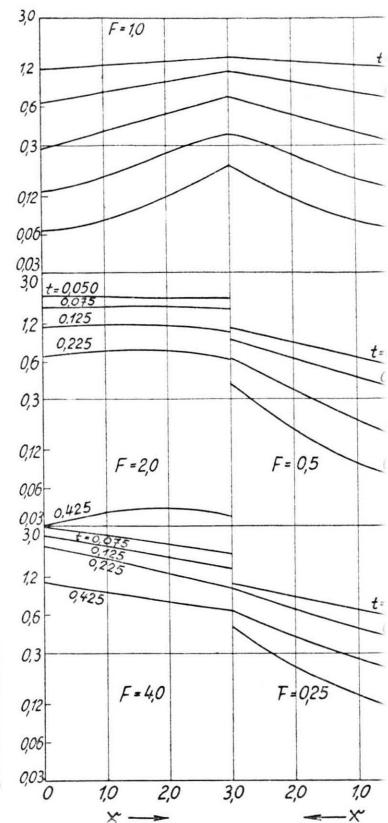


Abb. 11. Räumliche Verteilung der Dicke für verschiedene Zeiten  $t$  beim Zusammenstoß.

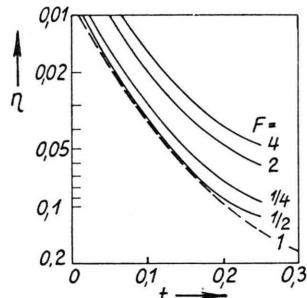


Abb. 12. Normierungsfaktor  $\eta = 3/(x_f - x_u)$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ .

dass Druck und Dichte zur Front hin abfallen. Das Abflachen der Kurven für Strömungs- und Schallgeschwindigkeit an der Front wird dadurch bedingt, dass für kleiner werdende Stoßstärke diese beiden Kurven schließlich stetig in die betreffenden Kurven der Homologie-Lösung übergehen müssen, deren räumliche Gradienten mit der Zeit wie  $(t - t_0)^{-1}$

abfallen und im betrachteten Hinterland der Homologie-Lösung, in die die Front hineinläuft, in dem hier in Frage kommenden Bereich von  $\xi < 0,4$  durch die folgenden Formeln gegeben sind:

$$u_x = 1,5(1-k)/(t-t_0), \quad a_x = -0,24(1-k)/(t-t_0).$$

Diese Gradienten sind kleiner als die Gradienten, die durch den geradlinigen Verlauf von  $u$  und  $a$  hinter der stoßenden Front bei den entsprechenden Zeiten gegeben werden. Der durchschnittliche Gradient

$$\frac{u_f - u_u}{x_f - x_u} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a_f - a_u}{x_f - x_u}$$

(der Index f bezeichnet die Front, der Index u den Wert an der Diskontinuitätslinie) nimmt sehr stark ab (etwa um den Faktor 10 in dem hier betrachteten Bereich). Der starke Anstieg der Entropie und der damit verbundene Abfall von Druck und Dichte wird im wesentlichen nur durch die Homologie-

Lösung bestimmt, in welche die Front hineinläuft, da die Entropieerzeugung schon bei verhältnismäßig großen Stoßstärken  $\beta > 0,5$  sehr klein ist ( $\Delta s < 0,3$ ). Vielleicht ist hierin der Hauptgrund zu suchen, daß das Verhalten der Stoßwellen im wesentlichen nur durch die Homologie-Lösung bestimmt wird. Durch das Ausströmen des Gases aus der dichten Mitte sinkt seine Temperatur in der Mitte stärker ab als an der Front. Da nun bei immer mehr verschwindender Front die Temperatur wegen der Eigenschaften der Homologie-Lösung, in die die Front hineinläuft, an ihr weiter ansteigt, so bleibt schließlich eine Verteilung zurück, aus deren kalter, aber dichter Mitte die Materie mit zunehmender Geschwindigkeit abströmt.

Betrachtet man die Kurven für  $F = 2$ , so fällt sofort auf, daß die Änderungen von  $u$ ,  $a$  und  $s$  sehr viel kleiner sind als die entsprechenden für  $F = 1/2$ ; um etwa eine gleiche Veränderlichkeit zu erreichen, muß man für  $F = 2$  die Zeiten  $t = 0,225$  mit  $t = 0,05$  oder  $0,075$  für  $F = 1/2$  vergleichen. Dies würde im  $\xi$ -Maßstab etwa dem gleichen  $\xi$  entsprechen.

Für  $F = 4$  kann man einen solchen Vergleich noch nicht machen, da im  $\xi$ -Maßstab die Zeit  $t = 0,225$  für  $F = 4$  etwa der Zeit  $0,01$  für  $F = 1/4$  entsprechen würde.

Wie aus den obigen Betrachtungen hervorgeht, möchten wir die folgende Behauptung aufstellen: beim Zusammenstoß zweier Stoßwellen wird das Verhalten der Stoßwellen im wesentlichen nur durch die Homologie-Verteilung bestimmt, in die die Stoßwelle hineinläuft, und ist fast unabhängig von der ursprünglichen Stoßstärke zur Zeit des Zusammenstoßes. Ferner verschwindet jede Stoßwelle nach etwa der Zeit, welche die Stoßfront braucht, um in der Homologie-Lösung, in die sie hineinläuft,  $\xi = -0,7$  zu erreichen, oder einfacher ausgedrückt: alle Stoßwellen enden bei  $\xi = -0,7$  der Homologie-Lösungen, in die sie hineinlaufen. Leider reicht das vorliegende Zahlenmaterial noch nicht aus, um diese Behauptung zu beweisen, jedoch läßt es sie als sehr wahrscheinlich erscheinen. Es wäre daher sehr angebracht, diese Behauptung durch umfangreichere Rechnungen oder vielleicht auch rein analytisch zu begründen. Falls sich unsere Behauptung bewahrheiten sollte, könnte man wahrscheinlich in einfacher Weise eine Statistik des Zusammenstoßes von Stoßwellen entwickeln, denn man hat als Parameterwerte, die zur Bestimmung des Ausgangs des Zusammenstoßes dienen, nur die Homologie-Parameter

$x_0$  und  $t_0$  nötig. Das allgemeine Verhalten der Stoßwelle läßt sich aus den vorliegenden Diagrammen ablesen und vielleicht auch nach etwas umfangreicherem Rechnungen in einfachen Formeln darstellen, was wir jetzt wegen der hier aus den oben ausgeführten Gründen auftretenden Willkür nicht versucht haben.

## V. Rechenergebnisse für das Überholen von Stoßwellen

Das Überholen zweier Stoßwellen wurde für drei Beispiele gerechnet. Es wurde dabei für alle drei betrachteten Fälle angenommen, daß die überholende Stoßfront (I) bis zu dem Zeitpunkt des Beginns der Rechnung gegenüber der zu überholenden Stoßfront (II) so stark sei, daß die Homologie-Form jener (I) im wesentlichen erhalten bleibt und daß im Augenblick des Beginns der Rechnung der Stoßstärkenparameter  $\beta = \varrho_{II}/\varrho_I = 0,3$  sei.

Die gerechneten Beispiele unterscheiden sich dadurch, daß bei

- die Rechnung bei  $\xi = 0$  der zu überholenden Stoßfront (II) beginnt,
- bei  $\xi = 0,5$ ; während bei der letzten
- bei  $\xi = 1,0$  begonnen wird, d. h. ein direktes Zusammentreffen mit der vorangegangenen Stoßfront (II) angenommen wird.

Ferner wurden die Teilchen- und Schallgeschwindigkeiten so normiert, daß das  $u_{IIf}$  für  $t = 0$  (dem Beginn der Rechnung) 0,5 beträgt.

Im Falle (a) und (b) nimmt die Stoßstärke im  $\xi$ -Maßstab von (II), d. h. vom Ort des Beginns der Rechnung aus gemessen, etwa wie beim Zusammenstoß ab. Leider mußte die Rechnung für (a) bei etwa  $\xi = 0,6$  bis  $0,7$  von (II) abgebrochen werden, da dann der Methodenfehler, der sich besonders bei großen  $\beta$  (von 0,6 bis 0,7) bemerkbar macht und der wohl im wesentlichen durch das starke Anwachsen der Entropie von (II) hervorgerufen wird, so stark ins Gewicht fällt, daß die Rechnung nicht weiter durchgeführt werden konnte. Immerhin scheint aus den Rechnungen hervorzugehen, daß die Stoßfront beim Erreichen der Front (II) so schwach geworden ist, daß sie im wesentlichen eine Schallwelle darstellt. Im Falle (b) erreicht die Stoßfront (I) die Stoßfront (II) immerhin noch mit dem Stoßparameter  $\beta = 0,62$ . Auch dieser Wert ist verhältnismäßig groß, und daher wurde die Rechnung

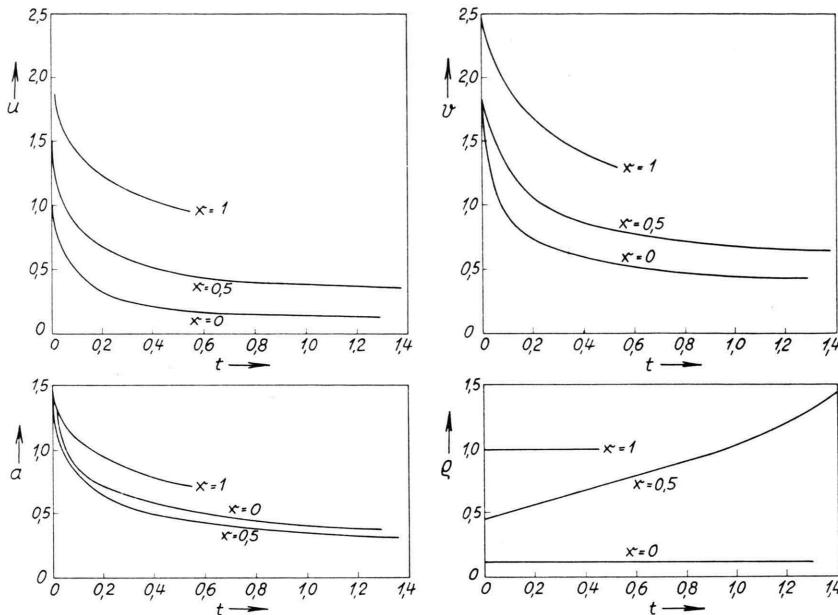
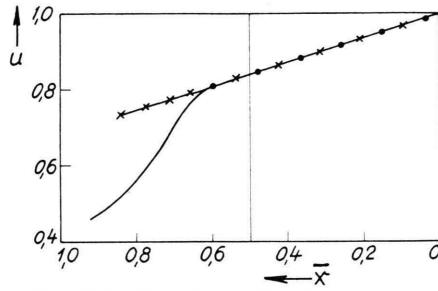
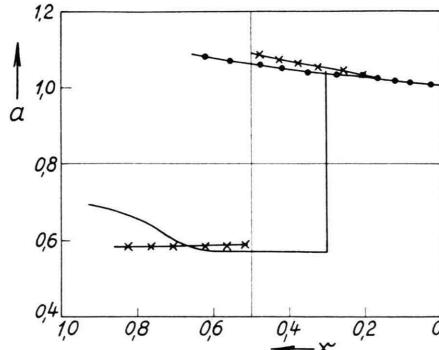


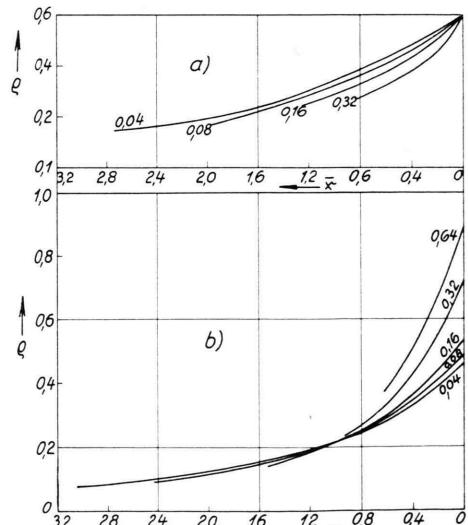
Abb. 13. Zeitliche Entwicklung der überholenden Stoßfront.

nicht weiter fortgesetzt, sondern es wird angenommen, daß sich, wie aus früheren Rechnungen hervorgeht<sup>1</sup>, die ganze Verteilung bald wieder einer Homologie-Verteilung annähert.

Abb. 14. Räumliche Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit  $u$  für verschiedene Zeiten  $t$  beim Überholen.  
—  $t=0,04$ ; —  $x-x-$   $t=0,08$ ; -●-  $t=0,16$ .Abb. 15. Räumliche Verteilung der Schallgeschwindigkeit  $\alpha$  für verschiedene Zeiten  $t$  beim Überholen.  
Bezeichnungen wie in Abb. 14.

Bemerkenswert ist, daß die räumliche Geschwindigkeitsverteilung in beiden Fällen und für alle Zeiten linear ist. Die Abb. 14, 15, 16 für diese beiden Fälle wurden so eingerichtet, daß die Steigung von  $u$  in dem hier verwandten Maßstab immer  $1/3$  beträgt. Außerdem sind in Abb. 17 die Normierungsfaktoren in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt.

Im Falle (c) tritt im Augenblick des Zusammenstoßes, wie schon ausgeführt, sowohl eine Diskon-

Abb. 16 a, b.  
Abb. 16. Räumliche Verteilung der Dichte  $\rho$  für verschiedene Zeiten  $t$  beim Überholen. a)  $x=0$ , b)  $x=0,5$ , c)  $x=1$ . Bezeichnungen in Abb. 16 c wie in Abb. 14.

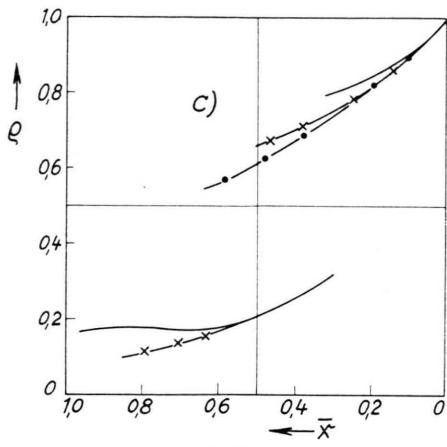
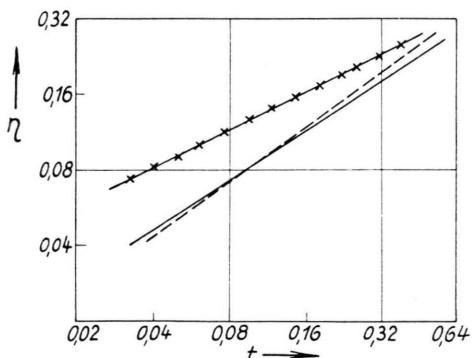


Abb. 16 c.

tinuität als auch eine *centered rarefaction wave* auf; sie wandert im Laufe der Zeit nach hinten, und es tritt nach verhältnismäßig kurzer Zeit ( $t$  etwa 0,15 bis 0,2) an der Front wieder die Homologie-Verteilung mit  $k=0,39$  auf, und in den Diagrammen (Abb. 16), die wie üblich normiert wurden ( $u_f=1$ ,  $a_f=1$ ,  $p_f=1$  und die Steigung  $u_f/x_f=1/3$ ), zeigt sich nach sehr kurzer Zeit an der Front wieder dieselbe Verteilung, während sie natürlich weiter hinten wegen des Auftretens der Diskontinuität und der *centered rarefaction wave* ein wesentlich anderes Verhalten hat. Das  $t_0$  für die Homologie-Lösung beträgt ungefähr 0,06 gegenüber 0,8 der alten Stoßfront (II).

Abb. 17. Normierungsfaktor  $\eta(t) = 3(u_x)_{\text{Front}}$ .  
— — —  $\xi=0$ ; — — —  $\xi=0.5$ ; -x-x-  $\xi=1.0$ .

Aus den Ergebnissen dieser Rechnungen kann man wohl den folgenden Schluß ziehen: Die Stoßfront (II) bleibt in ihrer Frontgeschwindigkeit im wesentlichen ungeändert, falls die überholende Stoßfront (I) nicht sehr stark gegenüber der Stoßfront (II) ist. Falls hingegen die Stoßfront (I) so stark ist, daß sie mit einem wesentlich von 1 verschiedenen Stoßstärkenverhältnis (Machzahl ungefähr 5) die Stoßfront (II) erreicht, dann nähert sich diese nach verhältnismäßig kurzer Zeit wieder asymptotisch der Homologie-Lösung mit  $k=0,39$ .

### Schlußbemerkung

Die hier verwandte Rechenmethode – Charakteristikenverfahren mit differentieller Erfüllung der Randbedingungen – führt bei längeren Rechnungen durch die rein differentielle Erfüllung der Randbedingungen bei schwachen Stoßfronten zu Fehlern bis zu 5% nach etwa 50 bis 100 Frontpunkten der Erfüllung dieser Randbedingungen, und man müßte dieses Verfahren noch durch direktes Einsetzen der Randbedingungen u. ä. ergänzen.

Beim Zusammenstoß zweier Stoßwellen scheint das Verhalten der Stoßfronten im wesentlichen nur durch die Homologie-Verteilung bestimmt zu sein, in die die Stoßfront hineinläuft. Alle Stoßfronten verschwinden etwa bei  $\xi = -0,7$ . Dieser Schluß ist hier noch unsicher und müßte durch umfangreichere und genauere Rechnungen bestätigt werden.

Beim Überholen zweier Stoßfronten wird die zu überholende Stoßfront nicht wesentlich verändert, falls die in die Verteilung hineinlaufende Stoßfront nicht sehr stark ist; im letzteren Fall nähert sich nach dem Überholen der beiden Stoßfronten diese starke Stoßfront sehr schnell wieder der Homologie-Verteilung.

Der Verf. dankt Herrn Prof. C. F. v. WEIZSÄCKER für die Anregung zu dieser Arbeit und zahlreiche wertvolle Diskussionen; Herrn Prof. L. BIERMANN für die Erlaubnis zur Benutzung der Göttinger Elektronenrechenmaschine G 1 und seinen Kollegen für die Mithilfe bei der Durchführung der numerischen Rechnungen.